Université Hassan 1
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2017-2018
Filière: SMA/SMI
Module : Analyse I.
Responsable: N.Mrhardy

Examen de Rattrapage
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours (5 pts)

(1) Donner la définition:
   (a) D'une suite bornée.
   (b) D'une suite tendant vers $+\infty$.

(2) Montrer, en utilisant la définition, que:
   (a) La suite $\left(\dfrac{1-2\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -2.
   (b) La suite $(\ln(1+n^2))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(3) Montrer que
   (a) Toute suite croissante est minorée.
   (b) La somme d'une suite convergente et une suite tendant vers $+\infty$ est une suite qui tend vers $+\infty$.

(4) (a) Donner la définition de la continuité uniforme d'une fonction.
   (b) Montrer que l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1.(5 pts)

(1) Calculer, si elles existent, les limites suivantes:

$$(a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2(x)},\qquad (b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{E(\ln(x))}{x},\qquad (c)\ \lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}\right)$$

(2) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer
   (a) Pour tout $x>0$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$$

   (b) Pour tous x, y éléments de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$,

$$|\ln(\tan(x)) - \ln(\tan(y))| \geq 2|x-y|$$

Exercice 2.(3pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définit pour tout $x>0$ par: $\quad f(x) = 1 - xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(1) Montrer que pour tout $x>0$, on a

$$0 \leq f(x) < x$$

(2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, donner son prolongement.

(3) Montrer que pour tout $x>1$, $f(x)=1$. La fonction f est-elle continue en 1.

Exercice 3.(4 pts) (TD)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \arg\sinh\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

(2) Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x>0$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{x}$ si $x<0$

(3) En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de la fonction $\ln(x)$.

Exercice 4.(3 pts)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction croissante définie sur un segment non trivial de $\mathbb{R}$.
On considère l'ensemble $E = \{x \in [a,b] / f(x) \geq x\}$

(1) Montrer que E admet une borne supérieure que l'on notera α.

(2) Montrer par l'absurde que α est un point fixe de f.

Indication: On pourra étudier les deux cas: $f(\alpha) > \alpha$ et $f(\alpha) < \alpha$